Lezione 5

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ sp di Hilbert reale separabile

Un processo Gaussiano isonormale su H è un processo Gaussiano $X = \{X(h), h \in H\}$ su H

t.c.

$$\mathbb{E}[X(h)] = 0 \quad \forall h \in H$$

$$\mathbb{E}[X(h)X(g)] = \langle h, g \rangle_H \quad \forall h, g \in H$$

Assumiamo che $\mathcal{F} = \sigma(X)$.

Ricordiamo la famiglia dei polinomi di Hermite $\{H_q, q = 0, 1, 2, \dots\}$: $\quad H_0 \equiv 1$

$$q = 1, 2, \dots \quad H_q = (-1)^q \gamma^{-1} \cdot \gamma^{(q)}, \quad \gamma \text{ densità Gaussiana standard}$$

Per $q = 0, 1, 2, \dots$, il q-esimo caos di Wiener C_q è definito come segue

$$C_q := \overline{\operatorname{span}\{H_q(X(h)), h \in H, \|h\|_H = 1\}}^{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{P})}}$$

Vale: $\quad C_q \perp C_{q'}$ se $q \neq q'$ in $L^2(\mathbb{P})$ (2)

e $\quad \bigoplus_{q=0}^{+\infty} C_q = L^2(\mathbb{P}) = L^2(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$

Approssimazione Gaussiana

$N \sim N(0,1)$, $F = f(X)$ $\quad X$ processo Gaussiano isonormale su H

Per Stimare

$$d_{\mathcal{H}}(F,N) := \sup_{\phi \in \mathcal{H}} \left| \mathbb{E}[\phi(F)] - \mathbb{E}[\phi(N)] \right|$$

con $\mathcal{H}$ classe separante

metodo di Stein — caos di Wiener — Calcolo di Malliavin

Applicazioni

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2, $N \sim N(0,1)$ (f non costante) t.c.

$\mathbb{E}[|f(N)|] < +\infty$ e $\mathbb{E}[|f''(N)|^4] < +\infty$

Fissiamo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definiamo $\forall T > 0$

$$F_T := \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{aT}^{bT} \left(f(B^H_{u+1} - B^H_u) - \mathbb{E}[f(N)] \right) du$$

con $\{B^H_t, t \geq 0\}$ moto Browniano frazionario di indice $H \; (\in (0, \frac{1}{2}))$

Teorema (Nourdin - Peccati - Reinert, 2009)

Per $T \to +\infty$, $d_W\left(\frac{F_T}{\sqrt{\mathrm{Var} F_T}}, N\right) = O\left(T^{-1/4}\right)$

2. **Teorema** (Nourdin-Peccati, 2009)

(Nualart-Peccati 2005)

Sia $\{F_n, n \geq 1\}$ una successione di S.a. in C_q, $q = 2, 3, \ldots$ t.c. $\mathbb{E}[F_n^2] = 1 \; \forall n$, allora

$F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{d} N \sim N(0,1)$ se e solo se $\mathbb{E}[F_n^4] \xrightarrow[n]{} 3$

equivale a $K_4(F_n) \xrightarrow[n]{} 0$

Inoltre,

$$d_{\mathcal{H}}(F_n, N) \leq C_{\mathcal{H}}(q) \sqrt{\mathbb{E}[F_n^4] - 3}$$

dove $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{Kol}, \mathcal{H}_{TV}, \mathcal{H}_W$, $C_{\mathcal{H}}(q) \in (0, +\infty)$.

Calcolo di Malliavin

Derivata

Sia S l'insieme delle S.a. della forma

$$F = f(X(\phi_1), \ldots, X(\phi_m))$$

dove $m \geq 1$, $\phi_1, \dots, \phi_m \in H$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ C^∞ t.c. f e tutte le sue derivate abbiano crescita al più polinomiale all'infinito.

Osservazione $\{ H_n(X(h)),\ h \in H,\ \|h\|_H = 1,\ n \geq 0 \} \subset \mathcal{S}$

dunque $\mathcal{S}$ e' denso in $L^q(\mathbb{P})$, $q \in [1, +\infty)$

Definizione La derivata di Malliavin di $F \in \mathcal{S}$

$$F = f(X(\phi_1), \dots, X(\phi_m))$$

e' definita come segue

$$DF := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} (X(\phi_1), \dots, X(\phi_m)) \cdot \phi_i$$

$DF : \Omega \to H$, $DF \in L^q(\mathbb{P}; H) := \{ V : \Omega \to H$ s.a. t.c. $\mathbb{E}[\|V\|_H^q] < +\infty \}$

Esempi 1. Se $F = X(h)$, $h \in H$
si ha $D X(h) = h$

2. Se $F = X(h)^2$, $h \in H$
si ha $D X(h)^2 = 2 X(h) \cdot h$

Osservazione Per $h \in H$, $F \in \mathcal{S}$

$$\langle DF, h \rangle_H = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \Big[f(X(\phi_1) + \varepsilon \langle \phi_1, h \rangle_H, \dots, X(\phi_m) + \varepsilon \langle \phi_m, h \rangle_H$$

$- F]$

(5)

$\rightsquigarrow$ $\langle DF, h\rangle_H$ e' la derivata in $\varepsilon = 0$ della v.a. $F = f(X(\phi_1), \dots, X(\phi_m))$ composta con il processo traslato $\{X(\phi) + \varepsilon\langle \phi, h\rangle, \ \phi \in H\}$.

Lemma (integrazione per parti)

Sia $F \in \mathcal{S}$, $h \in H$. Si ha

$$\mathbb{E}[\langle DF, h\rangle_H] = \mathbb{E}[F X(h)]$$

dimostrazione Possiamo assumere $\|h\|_H = 1$.

Esistono m elementi ortonormali di H, diciamo $\{h_1, \dots, h_m\}$ t.c. $h_1 = h$ e

$F = f(X(h_1), \dots, X(h_m))$, $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ C_p^∞

Allora: $$DF = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(h_1), \dots, X(h_m)) \cdot h_i$$

$h_1 = h$

$$\mathbb{E}[\langle DF, h\rangle_H] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(h_1), \dots, X(h_m))\right]\langle h_i, h\rangle_H$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(X(h_1), \dots, X(h_m))\right]$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m)\, \frac{e^{-\sum_{j=1}^{m} x_j^2/2}}{(2\pi)^{m/2}}\, dx_1 \dots dx_m$$

stein

$$= \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \dots, x_m) \cdot x_1 \, \frac{e^{-\sum_{j=1}^{m} x_j^2/2}}{(2\pi)^{m/2}}\, dx_1 \dots dx_m$$

$$= \mathbb{E}[F X(h)].$$

$\square$

Osservazione $F, G \in \mathcal{S}$, allora $FG \in \mathcal{S}$ e $\forall h \in H$

6

$$\mathbb{E}[\langle D(FG), h\rangle_H] = \mathbb{E}[FG\, X(h)]$$

$\|$

$D(FG) = F\,DG + G\,DF$

$$\mathbb{E}[F \langle DG, h\rangle_H] + \mathbb{E}[G \langle DF, h\rangle_H]$$

Lemma Sia $q \in [1, +\infty)$, e' operatore lineare

$$D : \mathcal{S} \subset L^q(\mathbb{P}) \longrightarrow L^q(\mathbb{P}; H)$$
$$F \longmapsto DF$$

e' **chiudibile**.

Consideriamo su $\mathcal{S}$ la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{1,q}}$:

$$F \in \mathcal{S}, \quad \|F\|_{\mathbb{D}^{1,q}} := \left(\mathbb{E}[|F|^q] + \mathbb{E}[\|DF\|_H^q] \right)^{1/q}$$

Definiamo $\mathbb{D}^{1,q} := \overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{1,q}}}$ dominio della derivata di Malliavin rispetto alla norma $L^q(\mathbb{P})$.

Estensione chiusa (minimale)

$$D : \mathbb{D}^{1,q} \longrightarrow L^q(\mathbb{P}; H)$$

derivata di Malliavin (rispetto alla norma $L^q(\mathbb{P})$)

Proposizione (Regola della catena)

Sia $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ C^1 con derivate parziali limitate
Sia $F = (F_1, \dots, F_m)$ vettore aleatorio t.c.
$F_i \in \mathbb{D}^{1,q}$ per qualche $q \geq 1$. Allora

$$\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,q}$$

e
$$D\varphi(F) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) \cdot DF_i$$

Esempio Si dimostra che

1. $D X(h)^m = m\, X(h)^{m-1} h \;, \quad h \in H$
2. $D e^{X(h)} = e^{X(h)} \cdot h \;, \quad h \in H$

Prodotto tensore di spazi di Hilbert

$m = 2, 3, \dots$ $\quad (H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}), \dots, (H_m, \langle \cdot, \cdot \rangle_m)$ m sp. di Hilbert reali.

Definizione Un prodotto tensore di $H_1, \dots, H_m$ e' uno sp. di Hilbert reale $H_1 \otimes \dots \otimes H_m$ e una mappa multilineare

$$H_1 \times \dots \times H_m \longrightarrow H_1 \otimes \dots \otimes H_m$$
$$(h_1, \dots, h_m) \longmapsto h_1 \otimes \dots \otimes h_m$$

t.c.

(1) $\text{span}\{h_1 \otimes \dots \otimes h_m,\ h_i \in H_i,\ i=1,\dots,m\}$ e' denso in $H_1 \otimes \dots \otimes H_m$

(2) $$\langle h_1 \otimes \dots \otimes h_m, k_1 \otimes \dots \otimes k_m \rangle = \prod_{i=1}^{m} \langle h_i, k_i \rangle_{H_i} \quad \forall\, h_i, k_i \in H_i,\ i=1,\dots,m$$

Se $H_1 = \dots = H_m = H$, $\underbrace{H \otimes \dots \otimes H}_{m \text{ volte}} = H^{\otimes m}$

Osservazione Se $(H_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i)$ e' separabile $\forall i = 1, \dots, m$ allora anche $H_1 \otimes \dots \otimes H_m$ lo e'. Data una b.o. $\{e_k^{(i)},\ k \geq 0\}$ di H_i, allora $\{e_{k_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{k_m}^{(m)},\ k_i \geq 0,\ i=1,\dots,m\}$ e' una b.o. di $H_1 \otimes \dots \otimes H_m$.

Esempio Supponiamo che $H_i = L^2(A_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) =: L^2(\mu_i)$ con $(A_i, \mathcal{A}_i)$ polacco, μ_i positiva, σ-finita e non atomica. Vale

$$L^2(\mu_1) \otimes \dots \otimes L^2(\mu_m) \simeq L^2(\mu_1 \times \dots \times \mu_m)$$
$$\| \qquad\qquad$$
$$L^2(A_1 \times \dots \times A_m, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_m, \mu_1 \times \dots \times \mu_m)$$

Notazione Se $H_1 = \cdots = H_m = L^2(\mu)$, scriviamo

$$L^2(\mu)^{\otimes m} \cong L^2(\mu^m)$$

Prodotto tensoriale simmetrico di sp di Hilbert

Sia $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ uno sp di Hilbert reale e $m = 2, 3, \ldots$

Definizione Il prodotto tensoriale simmetrico di H di ordine m e' uno sp di Hilbert reale $H \odot \cdots \odot H =: H^{\odot m}$ e una mappa multilineare simmetrica

$$\overbrace{H \times \cdots \times H}^{m \text{ volte}} \longrightarrow H^{\odot m}$$

$$(h_1, \ldots, h_m) \longmapsto h_1 \odot \cdots \odot h_m$$

t.c.

(1) $\operatorname{span}\{h_1 \odot \cdots \odot h_m,\ h_i \in H,\ i = 1, \ldots, m\}$ e' denso in $H^{\odot m}$

(2) $$\langle h_1 \odot \cdots \odot h_m, k_1 \odot \cdots \odot k_m \rangle = \sum_{\sigma \in S^m} \prod_{i=1}^{m} \langle h_i, k_{\sigma(i)} \rangle_H, \quad \forall\, h_i, k_i \in H,\ i = 1, \ldots, m$$

Un modo di costruire $H^{\odot m}$ e' quello di considerare $H^{\odot m}$ come il sottospazio di $H^{\otimes m}$ invariante sotto mappe definite da 10

$$h_1 \otimes \cdots \otimes h_m \longmapsto h_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes h_{\sigma(m)}, \quad \sigma \in S^m$$

e definire $h_1 \odot \cdots \odot h_m = \frac{1}{\sqrt{m!}} \sum_{\sigma \in S^m} h_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes h_{\sigma(m)}$

Janson, Appendice E

Esempio Se $H = L^2(\mu) := L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$, allora

$$L^2(\mu)^{\odot m} \cong L^2_s(\mu^m) := L^2_s(A^m, \mathcal{A}^{\otimes m}, \mu^m)$$

Derivata di Malliavin di ordine $p = 2, 3, \dots$

Sia $F = f(X(\phi_1), \dots, X(\phi_m))$, $\phi_i \in H$, $i = 1, \dots, m$

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ C_p^∞

Definizione La derivata di Malliavin di F di ordine $p = 2, 3, \dots$ e' definita da

$$D^p F = \sum_{i_1, \dots, i_p = 1}^{m} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}, \dots \partial x_{i_p}} (X(\phi_1), \dots, X(\phi_m)) \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p}$$

$D^p F : \Omega \to H^{\odot p}$, $D^p F \in L^q(\mathbb{P}; H^{\odot p})$

"$\{ V : \Omega \to H^{\odot p}$" s.a. t.c.

$\mathbb{E}[\|V\|^q_{H^{\otimes p}}] < +\infty \}$

11

Lemma L'operatore $D^p : \mathcal{S} \subset L^q(\mathbb{P}) \longrightarrow L^q(\mathbb{P}; H^{\odot p})$ è lineare e chiudibile, $\forall q \in [1, +\infty)$, $p = 2, 3, \dots$

Consideriamo la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{p,q}}$ su $\mathcal{S}$: $F \in \mathcal{S}$

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{p,q}} := \left(\mathbb{E}\left[|F|^q\right] + \mathbb{E}\left[\|DF\|_H^q\right] + \dots + \mathbb{E}\left[\|D^pF\|^q_{H^{\otimes p}}\right] \right)^{1/q}$$

Definiamo $\mathbb{D}^{p,q} := \overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{p,q}}}$ dominio della derivata di Malliavin D^p rispetto alla norma di $L^q(\mathbb{P})$

Definizione La derivata di Malliavin di ordine p rispetto a $L^q(\mathbb{P})$ è

$$D^p : \mathbb{D}^{p,q} \longrightarrow L^q(\mathbb{P}; H^{\odot p})$$

l'estensione chiusa (minimale) di

$$D^p : \mathcal{S} \subset L^q(\mathbb{P}) \longrightarrow L^q(\mathbb{P}; H^{\odot p})$$

Osservazioni 1. $\mathbb{D}^{p+m, q+\varepsilon} \subseteq \mathbb{D}^{p,q} \quad \forall m, \varepsilon \geq 0$

Poniamo $\mathbb{D}^{\infty,q} := \bigcap_{p \geq 1} \mathbb{D}^{p,q}$

2. $\mathbb{D}^{p,q}$ è di Banach $\forall p = 1, 2, \dots, \forall q \in [1, +\infty)$

3. $\mathbb{D}^{p,2}$ e' di Hilbert $\forall p=1,2,\dots$ rispetto al prodotto scalare (12)

$$\langle F,G\rangle_{\mathbb{D}^{p,2}} = \mathbb{E}[FG] + \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}\left[\langle D^k F, D^k G\rangle_{H^{\otimes k}}\right]$$

per $F,G \in \mathbb{D}^{p,2}$.

Esercizio Sia $p=1,2,\dots$ $F,G\in\mathbb{D}^{p,4}$, allora

$$FG \in \mathbb{D}^{p,2} \text{ e } D^p(FG) = \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} D^r F \,\tilde{\otimes}\, D^{p-r} G$$

(Formula di Leibniz)

simmetrizzazione canonica

$$D^r F \,\tilde{\otimes}\, D^{p-r} G = \frac{1}{2}\left(D^r F \otimes D^{p-r} G + D^{p-r} G \otimes D^r F\right)$$

Osservazione Tutto cio' puo' essere esteso a v.a. a valori in uno sp. di Hilbert reale separabile V.

$$\mathcal{S}_V := \left\{ F = \sum_{j=1}^{m} F_j v_j,\ v_j \in V,\ F_j \in \mathcal{S} \right\}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ f(X(\phi_1),\dots,X(\phi_m)),\ m\geq 1,\ f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\ C_p^\infty \right\}$$

Definiamo, per $p=1,2,\dots$, $F\in\mathcal{S}_V$

$$D^p F := \sum_{j=1}^{m} D^p F_j \otimes v_j$$

Dunque

$$D^p : \mathcal{S}_V \subset L^q(\mathbb{P}; V) \longrightarrow L^q(\mathbb{P}; H^{\otimes p} \otimes V), \quad q \in [1, +\infty)$$
$$F \mapsto D^p F$$

13

lineare e chiudibile. Per $F \in \mathcal{S}_V$, consideriamo la norma

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{p,q}(V)} := \left(\mathbb{E}[\|F\|_V^q] + \sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}[\|D^j F\|^q_{H^{\otimes p} \otimes V}] \right)^{1/q}$$

Si definisca lo spazio $\mathbb{D}^{p,q}(V) := \overline{\mathcal{S}_V}^{\|\cdot\|_{\mathbb{D}^{p,q}(V)}}$

e l'operatore derivata $D^p : \mathbb{D}^{p,q}(V) \to L^q(\mathbb{P}; H^{\otimes p} \otimes V)$

Ovviamente, se $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}^{p,q}(V) = \mathbb{D}^{p,q}$

e D^p e' la derivata di Malliavin di ordine p.

Operatore divergenza $q = 2$

$p = 1, 2, 3, \dots$ Definiamo l'operatore δ^p (divergenza di ordine p) come l'aggiunto di

$$D^p : \mathcal{S} \subset \mathbb{D}^{p,2} \subset L^2(\mathbb{P}) \longrightarrow L^2(\mathbb{P}; H^{\otimes p})$$
$$F \mapsto D^p F$$

Se $H = L^2(\mu)$, allora δ e' l'integrale di Skorohod

Definizione Il dominio $\operatorname{dom}(\delta^p)$ e'

$$\mathrm{dom}(\delta^p) = \Big\{ u \in L^2(\mathbb{P}; H^{\otimes p}) \text{ t.c. } \exists\, c>0 : \quad \Big| \mathbb{E}\big[\langle D^p F, u\rangle_{H^{\otimes p}}\big] \Big| \le c\sqrt{\mathbb{E}[F^2]}\,,\ \forall F \in \mathcal{S} \Big\}$$

equivalentemente $\forall\, F \in \mathbb{D}^{p,2}$

Allora per $u \in \mathrm{dom}(\delta^p)$, $\delta^p(u)$ e' l'unico elemento di $L^2(\mathbb{P})$ t.c.

$$\mathbb{E}\big[\langle D^p F, u\rangle_{H^{\otimes p}}\big] = \mathbb{E}\big[F\,\delta^p(u)\big]$$

formula di dualita'

$\forall F \in \mathcal{S}$ (equivalentemente $\forall F \in \mathbb{D}^{p,2}$).

Osservazione 1. F costante, allora

$$\mathbb{E}\big[\delta^p(u)\big] = 0 \quad \forall u \in \mathrm{dom}(\delta^p)$$

2. $H \subset \mathrm{dom}(\delta)$, $\delta(h) = X(h)$, $\forall h \in H$.

Dalla formula di integrazione per parti: $\forall F \in \mathcal{S}$,

$$\mathbb{E}\big[\langle DF, h\rangle_H\big] = \mathbb{E}\big[F\,X(h)\big] \qquad \forall h \in H$$

$\Rightarrow \quad H \subset \mathrm{dom}(\delta)$, $\delta(h) = X(h)$, $\forall h \in H$.

3. $H^{\otimes p} \subset \mathrm{dom}(\delta^p)$, $p = 2, 3, \dots$

Proposizione Siano $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $u \in \mathrm{dom}(\delta)$ t.c. $\mathbb{E}\big[F^2 \|u\|_H^2\big]$, $\mathbb{E}\big[F^2 \delta(u)^2\big]$, $\mathbb{E}\big[\langle DF, u\rangle_H^2\big]$ siano finite. Allora $Fu \in \mathrm{dom}(\delta)$ e

$$\delta(Fu) = F\,\delta(u) - \langle DF, u\rangle_H$$

Esempio $\quad \delta(X(h)g) = X(h)X(g) - \langle h, g\rangle_H.$

$h, g \in H$

Osservazione 1. $\mathcal{S}_{H^{\otimes p}} := \left\{ F = \sum_{j=1}^{n} F_j h_j,\ n \geq 1,\ F_j \in \mathcal{S},\ h_j \in H^{\otimes p} \right\}$

$\subset \operatorname{dom}(\delta^p), \quad p \geq 1.$

2. $u \in \mathcal{S}_H \quad , \quad u = \sum_{j=1}^{m} F_j h_j, \quad F_j \in \mathcal{S},\ h_j \in H$

si ha $\quad \delta(u) = \sum_{j=1}^{m} \delta(F_j h_j) =$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(F_j\,\delta(h_j) - \langle DF_j, h_j\rangle_H \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(F_j\,X(h_j) - \langle DF_j, h_j\rangle_H \right)$$

quindi $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e

$$D\delta(u) = \sum_{j=1}^{m} \Big(X(h_j)\,DF_j + F_j h_j - \sum_{i,k=1}^{m_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}\big(X(\phi_1^j), \dots, X(\phi_{m_j}^j)\big)\,\phi_k^j \langle \phi_i^j, h_j\rangle_H \Big)$$

dove $F_j = f_j\big(X(\phi_1^j), \dots, X(\phi_{m_j}^j)\big) \in \mathcal{S}.$

Quindi $D\delta(u) - \delta(Du) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{S}_H.$

Teorema (Disuguaglianze di Meyer)

Per $k \geq p \geq 1$ interi e $q \in [1, +\infty)$, l'operatore δ^p e' continuo da $\mathbb{D}^{k,q}(H^{\otimes p})$ in $\mathbb{D}^{k-p,q}$, ossia esiste una costante $c = c(k, p, q) \in (0, +\infty)$ t.c.

$$\|\delta^p(u)\|_{\mathbb{D}^{k-p,q}} \leq c \|u\|_{\mathbb{D}^{k,q}(H^{\otimes p})} \quad \forall u \in \mathbb{D}^{k,q}(H^{\otimes p}).$$

Osservazione V sp di Hilbert reale separabile, $k = 1, 2, \dots$
Consideriamo $u \in V \otimes H^{\otimes k}$ della forma

$$* \quad u = \sum_{j=1}^{m} v_j \otimes h_j \quad \text{con } v_j \in V,\ h_j \in H^{\otimes k}.$$

Poniamo $\delta^k(u) := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \delta^k(h_j)$ e' una S.a. a valori in V

Vettori u della forma $*$ sono densi in $V \otimes H^{\otimes k}$, grazie alla disuguaglianza di Meyer, possiamo estendere δ^k a un operatore lineare e continuo da $V \otimes H^{\otimes k}$ a $L^2(\mathbb{P}; V)$.

Questa costruzione ci permette di dare un significato preciso a $\delta^k(f)$, $f \in H^{\otimes p}$ e $p > k$.

Infatti, dato che $H^{\otimes p} = H^{\otimes p-k} \otimes H^{k}$, abbiamo che $\delta^k(f)$ e' l'elemento di $L^2(\mathbb{P}; H^{\otimes p-k})$ ottenuto con la costruzione precedente prendendo $V = H^{\otimes p-k}$. (17)

Osservazione $\forall\, k = 1, \dots, p-1$ e $f \in H^{\otimes p}$ si ha

$$\delta^p(f) = \delta^{p-k}\left(\delta^k(f)\right)$$

Proposizione $\forall\, p = 1, 2, \dots$, $\forall u \in H^{\otimes p}$, abbiamo $\delta^p(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e

$$D\,\delta^p(u) = p\,\delta^{p-1}(u).$$

Integrali multipli

Definizione $p = 1, 2, \dots$, $f \in H^{\odot p}$ $\left(= L^2_s(\mu^p)\right)$. L'integrale multiplo di f di ordine p e'

$$I_p(f) := \delta^p(f).$$

Teorema (Ipercontrattivita') $\forall q > 0$, $p = 1, 2, \dots$ esiste una costante $c = c(p,q) \in (0, +\infty)$ t.c.

$$\mathbb{E}\left[\,|I_p(f)|^q\right]^{1/q} \le c\, \mathbb{E}\left[\,|I_p(f)|^2\right]^{1/2}, \quad \forall f \in H^{\odot p}$$

Proposizione Sia $p = 1, 2, \dots$ e $f \in H^{\odot p}$. $\forall q \in [1, +\infty)$

1. $I_p(f) \in \mathbb{D}^{\infty, q}$
2. $\forall r = 1, 2, \dots \quad D^r I_p(f) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-r)!} I_{p-r}(f), & r \leq p \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Proposizione Siano $p \geq q \geq 1$ interi, $f \in H^{\odot p}$, $g \in H^{\odot q}$ allora

$$\mathbb{E}[I_p(f) I_q(g)] = \begin{cases} p! \, \langle f, g \rangle_{H^{\otimes p}}, & \text{se } p = q \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In particolare, $\mathbb{E}[I_p(f)^2] = p! \, \|f\|^2_{H^{\otimes p}}, \ \forall f \in H^{\odot p}$.

Domanda: Perché gli integrali multipli $I_p(f)$, $f \in H^{\odot p}$ sono chiamati così?

Supponiamo $H = L^2(\mu)$ con $L^2(\mu) = L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$ dove $(A, \mathcal{A})$ polacco e μ positiva, σ-finita e non atomica. Sia $\mathcal{A}_0 := \{B \in \mathcal{A} : \mu(B) < +\infty\}$, la misura Gaussiana G su $(A, \mathcal{A})$ e'

$G = \{G(B), \ B \in \mathcal{A}_0\}$ processo Gaussiano t.c.

$$\mathbb{E}[G(B)] = 0 \quad \forall B \in \mathcal{A}_0$$

$$\mathbb{E}[G(B) G(C)] = \mu(B \cap C) \quad \forall B, C \in \mathcal{A}_0.$$

Il processo Gaussiano isonormale su $L^2(\mu)$ e'

$$X(f) = \int_A f(a)\, G(da), \quad f \in L^2(\mu)$$

integrale di Wiener-Itô

Itô, 1951

$p = 1, 2, \dots$, $\mathcal{E}_p$ e' l'insieme delle funzioni elementari di $L^2_s(\mu^p)$, della forma

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_p = 1}^{m} a_{i_1 \dots i_p} \mathbb{1}_{A_{i_1}} \cdots \mathbb{1}_{A_{i_p}}, \text{ dove} \qquad m \geq 1$$

A_i sono degli elementi di $\mathcal{A}_0$, disgiunti a due a due e $a_{i_1, \dots, i_p} \in \mathbb{R}$ t.c.

$a_{i_1 \dots i_p} = 0$ ognivolta che $i_j = i_k$ per $j \neq k$

Per $f \in \mathcal{E}_p$, $\tilde{I}_p(f) := \sum_{i_1, \dots, i_p = 1}^{m} a_{i_1 \dots i_p} G(A_{i_1}) \cdots G(A_{i_p})$

notazione $\quad = \int_{A^p} f(x_1, \dots, x_p)\, G(dx_1) \dots G(dx_p)$

1. $\tilde{I}_p$ e' lineare su $\mathcal{E}_p$ e non dipende dalla rappresentazione di $f \in \mathcal{E}_p$.

2. $p, q = 1, 2, \dots$, $f \in \mathcal{E}_p$, $g \in \mathcal{E}_q$, allora

$$\mathbb{E}[\tilde{I}_p(f)\tilde{I}_q(g)] = \begin{cases} p! \langle f, g\rangle_{L^2(\mu^p)}, & \text{se } p=q \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

20

3. $\mathcal{E}_p$ è denso in $L^2_s(\mu^p)$ Nualart cap 1

4. $\tilde{I}_p$ si estende in modo unico a un operatore lineare e continuo $L^2_s(\mu^p) \to L^2(\mathbb{P})$ che soddisfa 1. e 2.

5. $\tilde{I}_p$ coincide con $I_p : L^2_s(\mu^p) \to L^2(\mathbb{P})$
$f \mapsto \delta^p(f)$

Notazione $f \in L^2_s(\mu^p)$, $\tilde{I}_p(f) = \int_{A^p} f(x_1, \dots, x_p)\, G(dx_1) \dots G(dx_p)$

Osservazione Se $H = L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), Leb)$

allora

$$X(f) = \int_0^1 f(t)\, dB_t \quad \text{dove } (B_t)_{t\in[0,1]} \text{ è un moto Browniano standard}$$

processo Gaussiano isonormale su $L^2([0,1], Leb)$.

L'integrale multiplo di $f \in L^2_s([0,1]^p, Leb)$, $p = 2, 3, \dots$ di ordine p

coincide con l'integrale stocastico iterato:

$$\int_{[0,1]^p} f(t_1,\dots,t_p)\,dB_{t_1}\cdots dB_{t_p} = p!\int_0^1 dB_{t_1}\int_0^{t_1} dB_{t_2}\cdots \int_0^{t_{p-1}} dB_{t_p}\, f(t_1,\dots,t_p)$$ (21)

Ad esempio, $p=2$, $f(t_1,t_2)=1$ per $(t_1,t_2)\in[0,1]^2$, allora

$$2!\int_0^1 dB_{t_1}\int_0^{t_1} dB_{t_2} = B_1^2 - 1 = H_2(B_1)$$

$H_2(x) = x^2-1$

$$= H_2\left(\int_0^1 dB_t\right)$$

$g(x)=1,\ x\in[0,1]$

$f=1$ su $[0,1]^2$

$$\Rightarrow I_2(f) = H_2(X(g))$$

$$X(g) = \int_0^1 g(t)\,dB_t = B_1$$

Proposizione Sia $f\in H$ t.c. $\|f\|_H = 1$, allora $\forall p = 1,2,\dots$

$$H_p(X(f)) = I_p(f^{\otimes p})$$

H_p: p-esimo polinomio di Hermite

$f^{\otimes p}$: simmetrica

Come conseguenza, $I_p : H^{\odot p} \to C_p$ (C_p: p-esimo caos di Wiener)

e' un' isometria lineare tra

$H^{\odot p}$ con la norma $\frac{1}{\sqrt{p!}} \|\cdot\|_{H^{\otimes p}}$ e C_p con la norma $L^2(\mathbb{P})$.